

# Zum Umgang mit Termen, Funktionen, Variablen und Parametern

(vgl. auch das online-Material „Zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge“ und „Elementare Termumformungen“)

## LERNEN DER FORMELSPRACHE

Das Lernen der Formelsprache und damit ein verständiger Gebrauch von Termen, Variablen und Parametern erfolgt nach Vollrath/Weigand (vgl. [1], S. 101ff.) sinnvollerweise in sechs Phasen, von denen sich fünf auch im Kerncurriculum wiederfinden.<sup>1</sup>

### 1. Phase: Intuitiver Gebrauch von Variablen und Termen

Die Schüler lernen zunächst den Gebrauch von Variablen und Termen aus Aufgabenstellungen, die sich unmittelbar aus dem Kontext des Unterrichts ergeben. Das bedeutet zunächst die Verankerung dieser Sprache im Umgang mit Zahlen und Größen. In dieser Phase wird nicht über die Sprachelemente geredet, sondern sie werden nur verwendet. Dabei kommt es darauf an, sie als Ausdrucksmittel zur Beschreibung von Problemsituationen zu nutzen.

- (1) Verwendung von Variablen als Platzhalter für Zahlen, Bezeichnung durch Marken oder auch Buchstaben
- (2) Verwendung von Variablen als Zeichen, für die man z.B. in Tabellen nacheinander verschiedene Zahlen einsetzen kann
- (3) Aufstellen von Termen; zweckmäßig ist es dabei, von Beginn an Buchstaben zu verwenden, die an die betrachteten Objekte erinnert

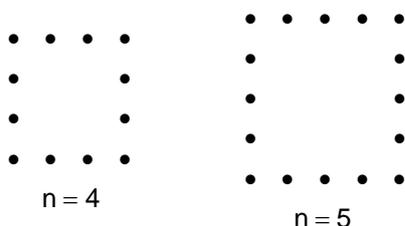
### 2. Phase: Reflexionsphase – Einführung der Begriffe Variable und Term

- (1) Einführung der Begriffe ‚Variable‘ (um die betrachteten Phänomene angemessen auszudrücken) und Term (als Rechenschema): „Soll immer die gleiche Rechnung nach einem bestimmten Schema ausgeführt werden, so kann man das Schema als *Term* mit Variablen und Zahlen schreiben.“
- (2) Termstruktur – Analysieren und Klassifizieren von Termen
- (3) Gleichheit von Termen

Unterschiedliche Strategien beim Aufstellen von Termen, die z.B. Punktmuster, Flächeninhalte oder Umfänge beschreiben, führen zu unterschiedlichen Termen.

#### Beispiel 1: Termstruktur und Gegenstandsstruktur

Wie viele Plättchen hat das 4., das 5., das 6., das 10., das 40. Muster?



Um die Fragen nach großen  $n$  zu beantworten, müssen die Lernenden die Plättchenmuster systematisch abzählen. Das kann auf unterschiedliche Art geschehen: Man kann die oberen Seiten und dann die beiden senkrechten Seiten zählen und kommt zu  $2 \cdot n + 2 \cdot (n - 2)$ . Man kann auch

<sup>1</sup> Die Erweiterung um neue Formelsprachen (z.B. Widerstands- oder Schaltalgebra) als sechste Phase gehört nicht zum Kern und findet deshalb keine Berücksichtigung.

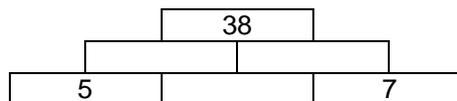
die 4 Eckpunkte separat erfassen und die vier Restseiten betrachten und gelangt zu  $4 + 4 \cdot (n - 2)$ . Auch andere Möglichkeiten werden ggf. genannt. Um das Vertrauen in den Term zu stärken, ist es zunächst wichtig, die genannten Terme auch für kleine  $n$  zu konkretisieren.

Die verschiedenen Ergebnisse für die Terme haben einen willkommenen Nebeneffekt: Wer hat denn nun Recht? Dies bietet einen guten Anlass für sinnstiftende Termumformungen.

Die Termäquivalenz stellt sich als Beschreibungsäquivalenz dar und ist daher semantisch stark angebunden. Die Termumformung wird für das Argumentieren genutzt. Zwei Terme sind dabei gleich, wenn man einen Term gemäß einer Regel in einen anderen umformen kann.

#### Beispiel 2: Handlungsvorschriften als Terme

Bei *Zahlenmauern* ist jeder Eintrag die Summe der beiden darunter stehenden Einträge. Unvollständige Zahlenmauern bieten Gelegenheit, um über Terme zu sprechen:



Hier gibt es wiederum unterschiedliche Strategien, zur Lösung zu gelangen. Füllt man etwa unten in der Mitte ein ‚ $x$ ‘ ein, so ergibt sich in der mittleren Zeile links  $5 + x$ ; auch dieser Wert lässt sich nicht ausrechnen, wohl aber kann man *mit ihm* rechnen.

Problematisch für die Schülerinnen und Schüler ist hier: Man kennt  $x$  nicht, also kennt man auch  $5 + x$  nicht. Was soll das also? Man kann  $5 + x$  ja gar nicht ausrechnen! Man muss mit den Lernenden explizit darüber reden, dass  $5 + x$  *keine* Aufforderung zu einer Handlung ist. Stattdessen wird das Operationszeichen (+) zu einem Bestandteil eines Zahlnamens.

Dass Handlungsvorschriften mathematische Objekte werden können, dass man mit Handlungsvorschriften rechnen kann, ist für Schülerinnen und Schüler alles andere als selbstverständlich, führt aber andererseits in der Algebra zu Erfolgen. Das Phänomen ist zudem aus der Bruchrechnung bekannt:  $1/3$  gleichzeitig eine Handlungsvorschrift als auch das Ergebnis, und man kann das Rechnen mit Zwischenergebnissen auch auffassen als Rechnen mit Handlungsvorschriften.

### 3. Phase: Erkundungsphase – Erarbeitung der Termumformungstypen

1. Schritt: Ordnen
2. Schritt: Zusammenfassen
3. Schritt: Klammern auflösen, Binomische Formeln als Spezialfall

### 4. Phase: Nutzung der Formelsprache

Formelsprache wird immer wieder verwendet, z.B.

- um die Gleichwertigkeit zweier Rechenschemata zu zeigen;
- um bei quadratischen Zusammenhängen in einfachen Fällen (und im allgemeinen Fall) zwischen faktorisierte Form und Scheitelpunktform sowie Scheitelpunktform zu wechseln;
- um algebraische Beweise durchzuführen (z.B. Pythagoras)

### 5. Phase: Erweiterung der Formelsprache – z.B. Wurzelterme, Potenzen

- (1) Terme mit Wurzeln
- (2) Potenzrechnung

## ASPEKTE VON VARIABLEN

Für Schülerinnen und Schüler bedeuten Variable keineswegs immer dasselbe: Es können Platzhalter sein oder Unbekannte oder auch – wie bei Funktionstermen – Werte, in die man alles einsetzen darf, was im Definitionsbereich liegt.

Es hat sich als sinnvoll erwiesen, mit Malle (vgl. [2], S. 45ff.) die folgenden drei Aspekte des Variablenbegriffs zu unterscheiden. Am Beispiel des Lösens von Gleichungen wie  $2 \cdot (x + 1) = 8$  wird dieses deutlich:

- (1) Variable können den *Gegenstandsaspekt* haben; sie werden als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl angesehen.

Dies hat Konsequenzen für das Lösen einfacher Gleichungen:

Für die gesuchte Zahl  $x$  muss gelten:  $2 \cdot (x + 1) = 8$

Da das Doppelte der Zahl  $x + 1$  gleich 8 ist, ist  $x + 1 = 4$

Die Zahl  $x$  um 1 vermehrt ergibt 4. Somit ist  $x = 3$ .

Die Strategie ist erkennbar: Es handelt sich um *Rückwärtsarbeiten*.

- (2) Variable können den *Einsetzungsaspekt* haben; sie werden als Platzhalter angesehen, in die man Zahlen einsetzen darf.

Damit löst man die obige Gleichung wie folgt:

Die gesuchte Zahl muss  $2 \cdot (x + 1) = 8$  durch Einsetzung in eine wahre Aussage überführen.

Bei  $x = 3$  ist das der Fall.

Die Strategie besteht nunmehr in *sinnvollem Ausprobieren*.

- (3) Variable können unter dem *Kalkülaspekt* gesehen werden und aufgefasst werden als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.

Für die obige Gleichung bedeutet dies:

Ich forme die Gleichung  $2 \cdot (x + 1) = 8$  durch Anwendung von Regeln um. Zunächst wende ich die Regel an: „Man darf beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe von Null verschiedene Zahl dividieren“ und erhalte  $x + 1 = 4$ .

Nun wende ich die Regel an: „Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl subtrahieren“ und erhalte  $x = 3$ .

Die Strategie heißt hier: *Äquivalenzumformung*.

Diese letztgenannte Strategie ist die abstrakteste, da nicht das interessierende  $x$  in den Blick genommen wird, sondern die Gleichung. Es ist daher nicht sinnvoll, mit ihr zu beginnen. Stattdessen sollten im Kopf Gleichungen der Art  $x + a = b$  bzw.  $a \cdot x = b$  bzw.  $a \cdot x + b = c$  mit überschaubaren Koeffizienten gelöst werden, ohne dass die Lernenden angeben müssen, wie sie auf die Lösung gekommen sind. Erst danach werden kompliziertere Gleichungen behandelt, bei denen man mit Rückwärtsarbeiten oder sinnvollem Einsetzen nicht weiter kommt und man daher ein hinreichendes Motiv für das abstraktere Verfahren ‚Äquivalenzumformung‘ hat.

Ein willkommener Nebeneffekt dabei ist, dass man eine kompliziertere Gleichung auf eine lineare Gleichung und damit auf eine bekannte Gleichungsform reduziert hat. Damit sollten die Lernenden das Gefühl haben, sich nun auf vertrautem Terrain zu befinden.

Der Variablenbegriff darf nicht auf einen der genannten Aspekte reduziert werden. Es ist für das Betreiben von Mathematik charakteristisch, dass man diese Aspekte beständig wechseln muss und unter Umständen mehrere Aspekte gleichzeitig im Auge behalten muss (vgl. [2], S. 46 – 49).

## ASPEKTE VON FUNKTIONEN

Auch Funktionen haben mehrere Aspekte:

- Funktion als punktweise Zuordnung:  $f : x \mapsto f(x)$ . Jedem  $x$  wird genau ein  $f(x)$  zugeordnet.
- Funktion als Zuordnung von Änderungen: Jeder Änderung von  $x$  entspricht eine Änderung von  $f(x)$  (Kovariation).
- Funktion als Objekt (dessen Term ich in andere Terme einsetzen darf)

„Um Abhängigkeiten in Formeln zu erkennen, genügt es nicht, Formeln bloß ‚statisch‘ zu lesen. Man braucht auch ‚dynamische‘ Vorstellungen, die sich etwa in Sprechweisen der folgenden Art äußern: ‚Wenn x wächst, dann fällt y‘, ‚wenn x verdoppelt wird, wird y vervierfacht‘ usw.“. ([2], S. 79)

„Eine Funktion ähnelt einer Medaille mit zwei Seiten. Nur wer beide Seiten kennt, kann Funktionen sinnvoll untersuchen. (...) Jede Funktion  $f: x \mapsto f(x)$  weist zwei fundamentale Aspekte auf: *Zuordnung*: Jedem  $x$  wird genau ein  $f(x)$  zugeordnet. *Kovariation*: Wird  $x$  verändert, so ändert sich  $f(x)$  und umgekehrt. Der Ausdruck ‚Kovariation‘ (...) drückt (...) in recht einprägsamer Weise aus, worum es geht, nämlich um ein ‚Ko-Variieren‘ (...) der beiden Variablen. In der deutschen Literatur entspricht dieser Begriff in etwa dem Begriff ‚Funktionales Denken‘. (...) Beim Zuordnungsaspekt wird die Funktion jeweils nur *lokal* betrachtet, beim Kovariationsaspekt ist eine *globalere* Sichtweise der Funktion notwendig.“ ([3], S. 8-11)

Ob bei einem etwa aus einer mathematischen Modellierung gewonnenen Term der relational-statische oder funktional-dynamische Aspekt betont wird, hängt zunächst von der konkreten Problemstellung ab.

Es ist wichtig, die Schülerinnen und Schüler möglichst früh dafür zu sensibilisieren, dass die Übergänge zwischen Relation im Sinne von Zuordnung und funktionalem Zusammenhang im Sinne von Kovariation fließend sind. „Es ist bemerkenswert, dass in der üblichen Definition einer Funktion nur der Zuordnungsaspekt hervorgehoben wird. Man definiert ja: Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element  $x$  einer Menge  $A$  ein Element  $f(x)$  einer Menge  $B$  zuordnet. Von Kovariation ist hier nicht die Rede. Für einen formalen Aufbau der Mathematik reicht dies aus. Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt jedoch unentbehrlich. Wer diesen Aspekt nicht kennt und nur das weiß, was die Definition einer Funktion ausdrückt, kann in der Praxis mit Funktionen so gut wie nichts anfangen“ (vgl. [2], S. 86 oder [3], S. 8).

Die Behandlung des Kovariationsaspekts geht mit einer Begründung und einem tieferen Verständnis der Begriffe Variable und Parameter einher. Variablen werden von den Schülerinnen und Schülern wirklich ihrem Sinn nach als ‚Veränderliche‘ erfahren und nicht nur als Platzhalter für Zahlen.

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit Formel und Funktion, mit statischen wie dynamischen Denkweisen gleichermaßen bekannt gemacht werden. Dieses kann nicht gelingen, wenn zunächst statisch herangegangen und auch die Funktion *nur* statisch interpretiert wird, sondern nur, indem beide Facetten möglichst *zeitgleich* und *wertfrei* nebeneinander stehen und indem auch Übersetzungsmöglichkeiten zwischen statischer und dynamischer Interpretation eines Problems thematisiert werden.

## UMSETZUNG IM KERNCURRICULUM

Das Kerncurriculum führt die Lernenden Schritt für Schritt an den Umgang mit Variablen als ‚Veränderliche‘ heran. Zunächst wird der Einsetzungsaspekt betont. In den Jahrgängen 5/6 werden Termumformungen ohne Termumformungskalkül durchgeführt. Die Betonung liegt auf dem intuitiven Gebrauch von Zahltermen. Dabei kann an vielen Stellen schon funktionales Denken angebahnt werden. Beispiele hierfür sind u.a.:

- Winkelsummensatz: Wird ein Winkel in einem Dreieck vergrößert, so verringert sich die Summe der übrigen Winkelgrößen entsprechend.
- Winkel im Parallelogramm: Wird ein Winkel in einem Parallelogramm vergrößert, so vergrößert sich der gegenüberliegende Winkel entsprechend und die Nebenwinkel verkleinern sich entsprechend.
- Überschläge und Runden: Vergleich von gegensinnigem und gleichsinnigem Runden und Auswirkung auf das Ergebnis
- Funktionale Betrachtung von Zahltermen: Wie verändert sich das Ergebnis, wenn z. B. der erste Summand verdoppelt, der zweite halbiert wird oder wenn der erste Faktor verdoppelt, der zweite halbiert wird?
- Daten und Zufall: Wie verändert sich der Mittelwert einer Datenreihe, wenn ein Wert verändert wird? Wie können die Daten einer Datenreihe verändert werden, ohne dass sich der Mittelwert verändert etc.?

Der systematischen Aufarbeitung und Reflexion des bisherigen Kompetenzerwerbs ist in 7/8 explizit ein Lernbereich ‚Elementare Termumformungen‘ gewidmet. Dabei geht es darum, nicht nur eine Termumformungskompetenz, sondern eine Termanalysekompetenz zu entwickeln. Dieses Vorgehen ist auch bei der Behandlung funktionaler Zusammenhänge in den Jahrgängen 8 bis 10 ein durchgängiges Prinzip: die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen (Funktions-)gleichung und graphischen Eigenschaften ermöglicht ein vertieftes Verständnis. Das Lösen von Gleichungen wird graphisch als Schnittpunkt- oder Nullstellensuche verankert. Hier gehen statische und funktionale Sichtweisen fließend ineinander über.

Das Kerncurriculum fordert, neben der kontextgebundenen und kontextfreien Betrachtung von Termen, neben der Behandlung statischer und globaler Eigenschaften von Funktionen insbesondere auch die Thematisierung dynamischer Aspekte – u.a. findet sich die Parametervariation gleichsam als ‚roter Faden‘. Das Denken in Veränderungen wird angemessen früh angelegt und bereitet den Umgang mit Grenzprozessen und die Differenzialrechnung vor.

Ein sinnvoller und sinnstiftender Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt dabei den Erwerb der Kompetenzen. Der Einsatz von Schiebereglern ermöglicht es beispielsweise, den Kovariationsaspekt oder den Einfluss von Parametern sichtbar zu machen. Der verständige Umgang mit CAS-Notationen als mehrstellige Funktionen wie etwa  $\text{quad}(x,a,b,c) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  kann den Ausbau von Termkompetenz unterstützen.

## AUSZÜGE AUS DEM KERNCURRICULUM

### 2.1.2 Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

(...) Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein grundlegendes Verständnis von Zahlen, Variablen, Rechenoperationen, Umkehrungen, Termen und Formeln. (...)

### 2.2 Kompetenzentwicklung

Funktionen sind zentral zur mathematischen Erfassung quantitativer Zusammenhänge. Mit Funktionen lassen sich Phänomene der Abhängigkeit und der Veränderung von Größen erfassen und analysieren. Funktionen eignen sich zur Modellierung in einer Vielzahl von Alltagssituationen.

Für ein vertieftes Verständnis des Funktionsbegriffs sind die Behandlung der Vielfalt der Darstellungsformen und insbesondere der Wechsel zwischen ihnen bedeutsam. Dabei braucht die Abstraktionsleistung der Schülerinnen und Schüler beim Übergang von sprachlichen oder bildlichen Beschreibungen zur Funktionsgleichung besondere Beachtung und Unterstützung. Die abstrakten Darstellungsformen sind an den verständigen Gebrauch der Variablen gebunden.

Schülerinnen und Schüler in den Schuljahrgängen 5 und 6 haben ein statisches Variablenverständnis und betrachten funktionale Zusammenhänge lokal. Sie sehen Variable in Termen und Gleichungen als Platzhalter für konkrete Zahlen an und argumentieren mithilfe von passenden Einsetzungen. Der

Übergang zu einem dynamischen Variablenverständnis ist nicht trivial und für die Schülerinnen und Schüler mit kognitiver Anstrengung verbunden. Er wird deshalb besonders gesichert und vielfältig geübt. Variable sollen auch mit sachlogischen Wörtern und Buchstaben bezeichnet werden. Erst in späteren Schuljahrgängen erfassen die Schülerinnen und Schüler den Kovariationsaspekt und betrachten funktionale Zusammenhänge global. Dann werden die Betrachtung der funktionalen Aspekte und Repräsentationen und das Lösen von Gleichungen stets verzahnt.

### 3.1 Prozessbezogene Kompetenzbereiche

#### 3.1.2 Probleme mathematisch lösen

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nutzen Parametervariationen.</li> </ul>	
--	--	--

#### 3.1.3 Mathematisch modellieren

<ul style="list-style-type: none"> <li>• verwenden geometrische Objekte, Diagramme, Tabellen, Terme oder Häufigkeiten zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• verwenden Terme mit Variablen, Gleichungen, Funktionen oder Wahrscheinlichkeiten zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell.</li> </ul>	
--	--	--

#### 3.1.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

<ul style="list-style-type: none"> <li>• stellen einfache mathematische Beziehungen durch Terme, auch mit Platzhaltern, dar und interpretieren diese.</li> <li>• erstellen Diagramme und lesen aus ihnen Daten ab.</li> <li>• berechnen die Werte einfacher Terme.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• erfassen und beschreiben Zuordnungen mit Variablen und Termen.</li> <li>• nutzen den Dreisatz.</li> <li>• nutzen Tabellen, Graphen und Gleichungen zur Bearbeitung von Zuordnungen und linearen Zusammenhängen</li> <li>• Formen überschaubare Terme mit Variablen hilfsmittelfrei um.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nutzen Tabellen, Graphen und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• nutzen die Umkehrung der Grundrechenarten.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nutzen tabellarische, grafische und algebraische Verfahren zum Lösen linearer Gleichungen sowie linearer Gleichungssysteme.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen.</li> </ul>

### 3.2 Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

#### 3.2.1 Zahlen und Operationen

<ul style="list-style-type: none"> <li>• beschreiben die Struktur von Zahltermen.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• vergleichen die Struktur von Termen.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• verwenden Platzhalter zum Aufschreiben von Formeln.</li> <li>• nutzen Rechenregeln zum vorteilhaften Rechnen.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• verwenden Variablen zum Aufschreiben von Formeln und Rechengesetzen.</li> <li>• formen Terme mithilfe des Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzes um und nutzen die binomischen Formeln zur Vereinfachung von Termen.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• begründen exemplarisch Rechengesetze für Quadratwurzeln und Potenzen mit rationalen Exponenten und wenden diese an.</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• nennen <math>\sqrt{a}</math> als nichtnegative Lösung von <math>x^2 = a</math> für <math>a \geq 0</math>.</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• nennen <math>\sqrt[n]{a}</math> als nichtnegative Lösung von <math>x^n = a</math> für <math>a \geq 0</math>.</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• nennen <math>\log_b(a)</math> als Lösung von <math>b^x = a</math> für <math>a &gt; 0</math> und <math>b &gt; 0</math>.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• nutzen Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten auch bei Sachproblemen.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• lösen Grundaufgaben bei proportionalen und antiproportionalen Zusammenhängen, der Prozent- und Zinsrechnung mit Dreisatz.</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• lösen lineare Gleichungen, lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen sowie Verhältnisgleichungen in einfachen Fällen hilfsmittelfrei.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• lösen quadratische Gleichungen vom Typ <math>x^2 + p \cdot x = 0</math> und <math>x^2 + q = 0</math> hilfsmittelfrei.</li> <li>• lösen quadratische Gleichungen vom Typ <math>x^2 + p \cdot x + q = 0</math>, <math>a \cdot x^2 + b \cdot x = 0</math>, <math>a \cdot x^2 + c = 0</math> und <math>a \cdot (x - d)^2 + e = 0</math> in einfachen Fällen hilfsmittelfrei.</li> </ul>

#### 3.2.4 Funktionaler Zusammenhang

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen bei linearen Funktionen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen bei quadratischen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• beschreiben und begründen die Auswirkungen der Parameter auf den Graphen für Funktionen mit <math>y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d</math>.</li> </ul>

### 3.3 Vorwort zu den Lernbereichen

Die Algebra ist das grundlegende Teilgebiet der Mathematik, das die Kompetenzbereiche Zahlen und Operationen sowie Funktionaler Zusammenhang verfolgt. Sie umfasst die Rechenregeln der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen, den Umgang mit Ausdrücken, die Variablen enthalten, und Wege zur Lösung einfacher algebraischer Gleichungen.

Im Unterricht beginnt sie somit bei den Zahlen und Zahltermen, mit denen die Rechenregeln erkundet werden, und findet ihre Fortsetzung bei elementaren Termumformungen. Eine Klassifizierung der Terme nach ihrer Struktur ist hierbei für die Schülerinnen und Schüler hilfreich.

### 3.3 Lernbereiche

#### 3.3.2 Lernbereich Elementare Termumformungen

(...) Die Variablen sind im Sinne von Platzhaltern verankert. Der Variablenbegriff und der Zusammenhang zwischen Termen und Funktionen sowie der Darstellungswechsel zwischen Term, Graph und Tabelle werden hier vorbereitet und in späteren Lernbereichen ausgeschärft. (...)

#### 3.3.2 Lernbereich Lineare Zusammenhänge

Die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler über Zuordnungen und Terme und deren verschiedene Darstellungsformen werden aufgegriffen, um den Funktionsbegriff vorzubereiten, der erst in den folgenden Jahren ausgeschärft werden kann.

Lineare funktionale Zusammenhänge werden erkundet und lineare Funktionen und Gleichungen als mathematische Modelle für bestimmte Zusammenhänge identifiziert. Dabei erfahren die Schülerinnen und Schüler den Übergang von statischen zu dynamischen Variablen und entwickeln ein grundlegendes Verständnis für das funktionale Denken.

Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert. Die Schülerinnen und Schüler zeichnen Graphen linearer Funktionen auch hilfsmittelfrei. Die Steigung wird als konstante Änderungsrate identifiziert.

Digitale Mathematikwerkzeuge werden angemessen zur Visualisierung, zur numerischen Lösung sowie zur linearen Regression eingesetzt. Einfache lineare Gleichungen und Gleichungssysteme lösen die Schülerinnen und Schüler - auch mit Parametern - von Hand, wobei das Einsetzungsverfahren fächerübergreifend als universelle Lösungsstrategie betrachtet wird.

- Lineare Funktionen und lineare Gleichungen analysieren und vergleichen
  - (...) Parametervariationen in Funktionsgleichung und Funktionsgraph (...)
  - Ausgleichsgeraden mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen
- Lineare Gleichungen lösen
  - Lösen durch Probieren und Rückwärtsarbeiten
  - Lösen einfacher linearer Gleichungen hilfsmittelfrei
  - Lösen linearer Gleichungen mit digitalen Mathematikwerkzeugen
- Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen aufstellen und lösen
  - Sachprobleme modellieren
  - Bezug LGS und Graph, auch im Hinblick auf die Lösbarkeit
  - Lösen einfacher LGS graphisch und mit Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren
  - Lösen LGS mit digitalen Mathematikwerkzeugen

### 3.3.3 Quadratische Zusammenhänge

(...) Durch Parametervariation werden die Auswirkungen der Parameter auf das Aussehen des Graphen untersucht. (...)

- Quadratische Funktionen untersuchen – Parametervariation
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für  $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für  $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$
  - hilfsmittelfreies Zeichnen von Parabeln
- quadratische Zusammenhänge modellieren
  - (...) Ausgleichsparabeln mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen (...)

### 3.3.3 Exponentielle Zusammenhänge

(...) Die leitenden Fragestellungen bei der Untersuchung der Auswirkungen von Parametervariationen auf Funktionsgraphen und Funktionsgleichungen, die den Schülerinnen und Schülern von den linearen und quadratischen Funktionen bekannt sind, werden hier auf exponentielle Zusammenhänge übertragen. (...)

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Bedeutung der Parameter erläutern und insbesondere die Graphen der durch  $f$  mit  $f(x) = a \cdot b^x$  für positive  $b$  definierten Funktionen skizzieren können.

- Exponentialfunktionen untersuchen - Parametervariation
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für  $f(x) = a \cdot b^x + c$  (...)
- Exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren
  - (...) Ausgleichsfunktionen mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen (...)

### 3.3.3 Periodische Zusammenhänge

(...) Die an den linearen und quadratischen sowie Exponentialfunktionen gewonnenen Erkenntnisse über Parametervariationen werden hier übertragen und um die Streckung bzw. Stauchung entlang der Rechtsachse ergänzt. (...)

#### Literatur:

- [1] H.-J. VOLLRATH, H.-G. WEIGAND: Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2009.
- [2] G. MALLE: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig 1993.
- [3] G. MALLE: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren, Heft 103, S. 8-11, 2001.